



## 06 Finale

Molto difficile | Soluzioni ragionate

Leggi dopo aver provato. Sono validi anche altri ragionamenti corretti.

### 01 Risposta: 30

Da una scacchiera  $8 \times 8$  togli due caselle d'angolo opposte. Qual è il massimo numero di tessere  $1 \times 2$  che puoi collocare sulle caselle rimaste? Ogni tessera copre due caselle adiacenti per un lato e le tessere non possono sovrapporsi né uscire dalla scacchiera.

1. I due angoli opposti hanno lo stesso colore. Dopo averli tolti restano 30 caselle di quel colore e 32 dell'altro.
2. Ogni tessera usa una casella di ciascun colore: non puoi superare 30 tessere.
3. Il limite è raggiungibile: riempi le 6 righe centrali con 4 tessere orizzontali ciascuna, cioè 24 tessere.
4. Nella prima e nell'ultima riga restano 7 caselle consecutive: metti 3 tessere orizzontali in ognuna. In totale  $24 + 3 + 3 = 30$ .

### 02 Risposta: 14

Su una griglia vai da  $(0,0)$  a  $(4,4)$  con passi di una unità a destra o in alto. Non puoi mai trovarti sopra la diagonale  $y=x$ , ma puoi toccarla. Quanti percorsi sono possibili?

1. Indica con  $P(x,y)$  i percorsi ammessi fino al punto  $(x,y)$ . Metti  $P(x,0)=1$  e  $P(x,y)=0$  quando  $y > x$ .
2. Negli altri punti somma  $P(x-1,y) + P(x,y-1)$ : ogni ultimo passo arriva da uno di quei due punti.
3. Per  $x=1$  i valori da  $y=0$  a  $y=1$  sono 1,1. Per  $x=2$  sono 1,2,2; per  $x=3$  sono 1,3,5,5.
4. Per  $x=4$  sono 1,4,9,14,14. Quindi  $P(4,4)=14$ .



## 06 Finale

Molto difficile | Soluzioni ragionate

Leggi dopo aver provato. Sono validi anche altri ragionamenti corretti.

### 03 Risposta: 25

Il fattoriale  $n!$  è il prodotto  $1 \times 2 \times \dots \times n$ . Qual è il più piccolo intero positivo  $n$  per cui  $n!$  termina con almeno 6 zeri?

1. Nei fattoriali ci sono almeno tanti fattori 2 quanti fattori 5: il numero di zeri è quindi determinato dai fattori 5.
2. Fino a  $24!$ , i multipli di 5 sono 5, 10, 15, 20: forniscono soltanto 4 fattori 5.
3. In  $25!$ , i multipli 5, 10, 15, 20, 25 forniscono 5 fattori 5, e  $25=5^2$  ne fornisce uno aggiuntivo: in totale 6.
4. Prima di 25 il numero non può bastare. Il minimo è  $n=25$ .

### 04 Risposta: 35

Dall'insieme  $\{1, 2, \dots, 10\}$  scegli 4 numeri distinti in modo che nessuno sia consecutivo a un altro numero scelto. Quanti insiemi diversi puoi ottenere? L'ordine della scelta non conta.

1. Definisci  $y_1=x_1$ ,  $y_2=x_2-1$ ,  $y_3=x_3-2$ ,  $y_4=x_4-3$ . La distanza di almeno 2 tra gli  $x$  diventa una distanza di almeno 1 tra gli  $y$ .
2. Ottieni quindi quattro numeri distinti ordinati tra 1 e 7. Viceversa, da ogni scelta di quattro numeri tra 1 e 7 ricostruisci una scelta valida aggiungendo 0, 1, 2, 3.
3. Le scelte sono quindi le combinazioni di 7 elementi presi 4 alla volta:  $7 \times 6 \times 5 \times 4 \div (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 35$ .

### 05 Risposta: 360

Qual è il più piccolo intero positivo che ha esattamente 24 divisori positivi, contando anche 1 e il numero stesso?

1. Le scomposizioni di 24 in fattori almeno 2 sono: 24;  $12 \times 2$ ;  $8 \times 3$ ;  $6 \times 4$ ;  $6 \times 2 \times 2$ ;  $4 \times 3 \times 2$ ;  $3 \times 2 \times 2 \times 2$ .
2. Sottraendo 1 a ogni fattore ottieni i possibili esponenti. Gli esponenti maggiori vanno ai primi più piccoli, a partire da 2, 3, 5, 7.
3. I numeri minimi per questi casi sono rispettivamente 8388608, 6144, 1152, 864, 480, 360 e 420.
4. Il minimo è  $360=2^3 \times 3^2 \times 5$ , che ha  $(3+1)(2+1)(1+1)=24$  divisori.